Paul-Antoine Chevalier 24 novembre 2009

Macroéconomie

Variation sur la forme de la fonction de production (Solow 1956)

L3, ENS-Cachan, 2009-2010

Corrigé:
Cet exercice s'inspire de l'article de Solow 1956

1 Cas d'une CES

Supposons que la fonction de production est de la forme CES (Constant elasticity of substitution).

$$Y = (aK^p + L^p)^{1/p} \tag{1}$$

avec $0 < p < 1$ et $a > 0$
Pour simplifier l'exercice, on prend $p = 1/2$.

$$Y = (a\sqrt{K} + \sqrt{L})^2 \tag{2}$$

Comme dans les exercices précédents, la population croît au taux exogène et constant n. Enfin on suppose qu'il n'y a pas de progrès technique et que le capital ne se déprécie pas ($\delta = 0$).

☞ **Q1** *1 point*
Les rendements d'échelles sont-ils constants ?

Corrigé:

$$\begin{aligned}(a\sqrt{(\lambda K)} + \sqrt{\lambda L})^2 &= (\sqrt{\lambda}(a\sqrt{K} + \sqrt{L}))^2 \\ &= \lambda(a\sqrt{K} + \sqrt{L})^2\end{aligned}$$

On voit que la fonction est bien homogène de degré 1. Les rendements d'échelles sont bien constants.

☞ **Q2** *2 points*
On définit y la production par tête et k le capital par tête. Exprimer y en fonction de k et montrer que l'équation d'évolution du capital par tête peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{k} = s(A\sqrt{k} + 1)(B\sqrt{k} + 1) \tag{3}$$

avec $A = (a - \sqrt{n/s})$ et $B = (a + \sqrt{n/s})$

Corrigé:

Fonction de production par tête On définit la fonction de production par tête. $y = Y/L = (a\sqrt{k}+1)^2$. En développant le terme au carré, on obtient : $y = a^2k + 2a\sqrt{k} + 1$

Evolution du capital par tête L'équation d'évolution du capital par tête s'écrit $\dot{k} = sy - nk$. On peut remplacer y par son expression.

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s(a^2k + 2a\sqrt{k} + 1) - nk \\ &= s\left[(a^2 - n/s)k + 2a\sqrt{k} + 1\right] \end{aligned}$$

On obtient un polynôme du second degré en $\sqrt{k}$. On calcule le discriminant : $\Delta = 4a^2 - 4(a2 - n/s)$. On en déduit les racines du polynôme.

$$\begin{aligned} r1 &= \tfrac{-a-\sqrt{n/s}}{a^2-n/s} \\ &= -1\tfrac{a+\sqrt{n/s}}{(a-\sqrt{n/s})(a+\sqrt{n/s})} \\ &= \tfrac{-1}{a-\sqrt{n/s}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r2 &= \tfrac{-a+\sqrt{n/s}}{a^2-n/s} \\ &= -1\tfrac{a-\sqrt{n/s}}{(a-\sqrt{n/s})(a+\sqrt{n/s})} \\ &= \tfrac{-1}{a+\sqrt{n/s}} \end{aligned}$$

On peut donc réécrire l'équation d'évolution du capital par tête :

$$\begin{aligned} \dot{k} &= s(a^2 - n/s)(\sqrt{k} + \tfrac{1}{a+\sqrt{n/s}})(\sqrt{k} + \tfrac{1}{a-\sqrt{n/s}}) \\ &= s((a - \sqrt{n/s})\sqrt{k} + 1)((a + \sqrt{n/s})\sqrt{k} + 1) \\ &= s(A\sqrt{k} + 1)(B\sqrt{k} + 1) \end{aligned}$$

On obtient l'expression souhaitée.

☞ **Q3** *2 points*

Discuter l'existence d'un équilibre stationnaire en fonction des paramètres du modèle a, s et n. Donner l'expression de k à l'état stationnaire s'il existe.

Corrigé:

Pour avoir un équilibre stationnaire, on cherche une valeur de k qui annule la dérivée et qui appartienne à l'ensemble des réels. Il y a a priori deux solutions possibles pour $\sqrt{k}$, r1 et r2 mais r2 est toujours négatif doit donc être exclus.

$$r1 = \frac{1}{\sqrt{n/s} - a}$$

Il existe un état stationnaire si $r1 > 0$, c'est-à-dire si $\sqrt{n/s} > a$ ce qu'on peut aussi réécrire $n > a^2s$. Il existe un équilibre stationnaire si le taux de croissance de la population n est supérieur au taux d'épargne s à un facteur près (a^2). Dans ce cas la solution s'écrit : $\bar{k} = \frac{1}{(\sqrt{n/s}-a)^2}$

2 Cas d'une fonction à facteurs complémentaires

On prend maintenant une fonction de production à facteurs complémentaires.

$$Y = min\left(\frac{K}{a}, \frac{L}{b}\right) \tag{4}$$

Comme dans le cas précédent, on suppose qu'il n'y a pas de dépréciation du capital, que la population croît au taux n et qu'il n'y a pas de progrès technique.

☞ **Q4** *1 point*
Les rendements d'échelles sont-ils constants ?

Corrigé:

$$\min(\lambda K/a, \lambda L/b) = \lambda \min(K/a, L/b)$$

On a donc des rendements d'échelles constants.

☞ **Q5** *1 point*
Écrire la fonction d'évolution du capital par tête.

Corrigé:
On écrit la fonction de production par tête.

$$y = Y/L = \min(K/(aL), 1/b) = \min(k/a, 1/b)$$

L'évolution du capital par tête est égale à :

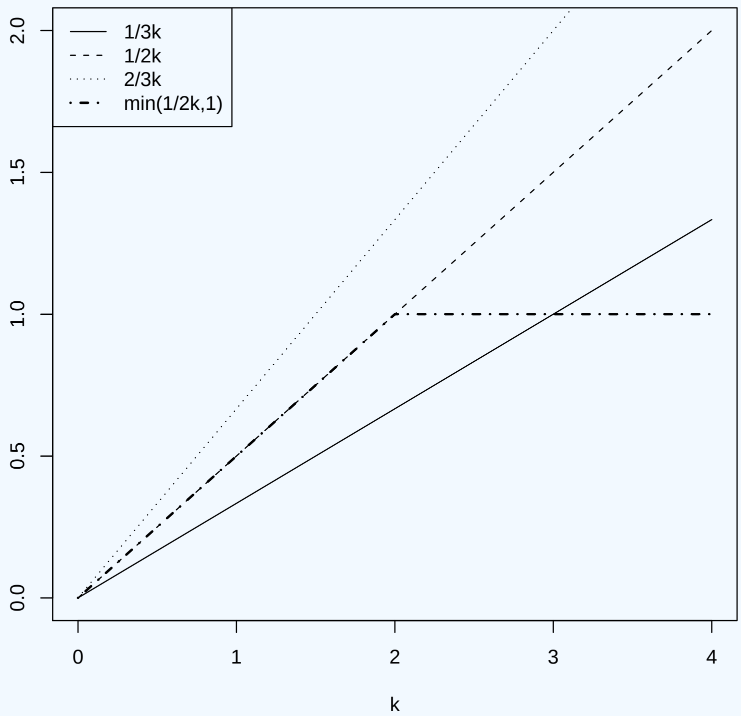
$$\dot{k} = s \min(k/a, 1/b) - nk$$

☞ **Q6** *3 points*
Discuter l'existence d'un état stationnaire dans les trois cas suivants :

1. $n > s/a$
2. $n = s/a$
3. $n < s/a$

On pourra s'appuyer sur un argument graphique.

Corrigé:



Cas $n > s/a$ **:** Dans ce cas, nk est toujours supérieur à $s \min k/a, 1/b$ et il n'existe pas d'état stationnaire.

Cas $n = s/a$ **:** On distingue les cas où initialement le capital par tête est élevé et les cas où il est faible :

- Si initialement $k > a/b$, alors $\dot{k} = s/b - nk$. On en déduit que $\dot{k} < s/b - na/b$ et donc $\dot{k} < 0$.
- si $k < a/b$ alors $\dot{k} = 0$
- Si on part d'un fort niveau de capital par tête, le capital par tête va décroître jusqu'à une situation stationnaire. Si on part, d'un bas niveau de capital par tête, la dynamique est stationnaire.

Cas $n < s/a$ **:** $\bar{k} = s/nb$ est un équilibre stable

Corrigé:

Morale : Il n'y a que dans le cas Cobb Douglas que l'existence d'un état stationnaire est garanti sous des conditions raisonnables.